第26卷 第5期　　工　程　数　学　学　报　　Vol. 26 No. 5
2009年10月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0875-08

基于位势理论的磁场预测法*

陈　杰[1]，鲁习文[1]，张　荣[2]，李建武[2]

(1- 华东理工大学数学系，上海 200237; 2- 中国船舶重工集团公司第七〇四研究所，上海 200031)

摘　要: 为了提高舰船的隐蔽性，需要对舰船进行消磁，而磁场预测是舰船消磁的核心步骤。对于任意舰船，本文构造了包含它的一个封闭曲面，并利用位势理论，建立该曲面上等效磁荷面分布与磁场传感器测量值之间应该满足的积分方程。离散化求解后，利用该等效磁荷面分布对舰船产生的磁场进行预测。此方法既不必考虑被研究舰船的几何结构，又可以在任意方向上进行预测，因此适用范围广。数值模拟表明了该方法预测的精确性和应用价值。

关键词: 舰船；消磁；磁场；预测；位势理论；积分方程

分类号: AMS(2000) 31B10　　**中图分类号**: O175.5; U665.18　　**文献标识码**: A

1　引言

现代舰船大多是由钢铁材料建造的，它在地球磁场的作用下，犹如一块巨大的浮动磁体，在其周围空间产生磁场。磁引信水雷、磁性制导鱼雷等磁性武器就是利用舰船磁场发起攻击的。因此为了减小舰船磁场，提高隐蔽性，需要对舰船进行消磁。舰船磁场预测问题就是在舰船周围放置若干个磁场传感器，利用所测得的舰船磁场的强度信息来预测其在空间中任意点上产生的磁场。此问题是舰船消磁的一个核心步骤，因为只有在较精确地预测了磁场之后，才能通过调整消磁绕组的电流来产生与预测值相反的磁场，从而将舰船保持在较低的磁性水平，实现舰船消磁。常用的磁场预测方法有深度换算法[1] 和磁体模拟法[1,2] 等。其中深度换算法只能在半空间中进行舰船磁场的预测，而磁体模拟法需要提供舰船等铁磁物体的几何结构才能保证预测的精度。文献 [3] 和 [4] 分别用遗传算法和几何方法来定位舰船所对应的磁偶极子，但是考虑的都是极其简单的情况，离开实际应用还有相当大的一段距离。

本文对任意的舰船，以 Laplace 方程 Neumann 外问题为模型，利用位势理论[5]，建立了包围该舰船的封闭曲面上等效磁荷面分布与磁场传感器测量值之间应该满足的积分方程。通过离散化求解该积分方程，得到等效磁荷面分布，该分布在曲面外产生的磁场与被研究舰船等铁磁物体产生的磁场是相同的，于是便利用该分布进行舰船磁场预测。本方法统一考虑了舰船等铁磁物体的感应磁性和固定磁性[6]，可以在任意方向上进行预测，运用时不必提供舰船等铁磁物体的几何结构，因此适用范围更广。数值模拟的结果表明了该方法的精确性。

2　位势理论

首先利用位势理论，给出 Laplace 方程 Neumann 外问题的等价积分方程描述。

收稿日期: 2008-02-18.　**作者简介**: 陈杰 (1982年12月生)，男，博士. 研究方向：最优化理论与应用.

*__基金项目__: 国家自然科学基金 (10771067).

定义 1[7]　在光滑的闭曲面Γ上给出连续函数f，要求出这样一个函数$\varphi(x,y,z)$，它在Γ的外部区域Ω'内调和，在$\Omega'\cup\Gamma$上连续，在无穷远处满足

$$\lim_{r\to\infty}\varphi(x,y,z)=0,\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

而且它在Γ上任一点的法向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n'}$存在，并满足$\frac{\partial\varphi}{\partial n'}|_\Gamma=f$，这里$n'$是区域$\Omega'$的外法线，即曲面$\Gamma$的内法线。这样的问题称为Laplace方程Neumann外问题。

定义 2[5]　对于定义在曲面Γ上的分片连续函数$\omega(P)$，函数

$$\varphi(M)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\frac{\omega(P)}{r_{PM}}\,\mathrm{d}S_P \tag{1}$$

称为单层位势，其中r_{PM}是曲面Γ上的变点P与空间中(包括曲面本身)任意点M之间的距离，$\mathrm{d}S_P$是Γ上P点处的面积元。

单层位势$\varphi(M)$的物理意义就是曲面Γ上的面密度为$\omega(P)$的磁荷层在空间中M点处产生的标量磁位。

定理 1[5,8]　若$\omega(P)$是光滑闭曲面Γ上的分片连续函数，则

1)　单层位势(1)当点M不在Γ上时处处是调和的，且在无穷远处正则；

2)　当$M\in\Gamma$时，单层位势(1)中的积分仍是收敛的，且它在Γ上连续；

3)　由(1)所确定的单层位势$\varphi(M)$在任一点$P_0\in\Gamma$存在法向导数$\frac{\partial\varphi(P_0)}{\partial n'_{P_0}}$，并且

$$\frac{\partial\varphi(P_0)}{\partial n'_{P_0}}=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\omega(P)\frac{\cos(\mathbf{r}_{PP_0},\mathbf{n}'_{P_0})}{r^2_{PP_0}}\,\mathrm{d}S_P+\frac{\omega(P_0)}{2}, \tag{2}$$

而且(2)式右端的积分是收敛的，其中$\mathbf{r}_{PP_0}$是P指向P_0的向量，r_{PP_0}是$\mathbf{r}_{PP_0}$的长度，$\mathbf{n}'_{P_0}$是曲面Γ上P_0点处的内法线的单位方向向量。

由上述定理，光滑闭曲面上的分片连续密度分布的单层位势在区域Ω'中确定了一个调和函数，并在$\Omega'\cup\Gamma$上连续，于是可以利用其法向导数在Γ上的极限值，来选取适当的密度分布$\omega(P)$，使对应的单层位势满足Neumann外问题给定的边界条件

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right|_\Gamma=f(P_0),\quad P_0\in\Gamma.$$

考虑到等式(2)，得到$\omega(P)$所应满足的积分方程为

$$\omega(P_0)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma}\omega(P)\frac{\cos(\mathbf{r}_{PP_0},\mathbf{n}'_{P_0})}{r^2_{PP_0}}\,\mathrm{d}S_P+2f(P_0),\quad P_0\in\Gamma. \tag{3}$$

这是一个弱奇性的第二类Fredholm积分方程。可以证明积分方程(3)对于任意的连续函数$f(P_0)$存在唯一解[5]。于是，Laplace方程Neumann外问题

$$\begin{cases}\Delta\varphi(M)=0, & M\in\Omega',\\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right|_\Gamma=f(P_0), & P_0\in\Gamma\end{cases} \tag{4}$$

的正则解可取为

$$\varphi(M)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\frac{\omega(P)}{r_{PM}}\,\mathrm{d}S_P,\quad M\in\Omega', \tag{5}$$

其中$\omega(P)$满足积分方程(3)。

3 舰船磁场预测公式

假设用一个闭曲面Γ把整个空间划分成Ω和Ω′两个区域，其中Ω′是Γ的外部区域。现在要预测处在区域Ω中的舰船在区域Ω′中产生的磁场，见图1。由于磁场等于标量磁位的负梯度，所以可以把磁场的预测转化为对标量磁位的预测。另一方面，在实际工程应用中，目前只有磁场传感器，而不存在磁位传感器，于是可以把磁场传感器在Γ上的磁场测量值看作边界条件，用Laplace方程Neumann外问题描述Γ∪Ω′中的标量磁位。

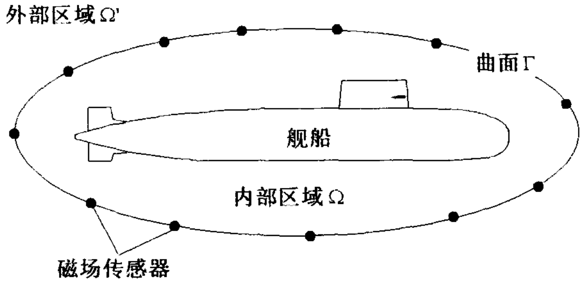

图1: 空间的划分

由电磁学知，在空间的每个正则点上(即在该点的邻域内介质的物理特性连续[8])，恒定磁场基本方程的微分形式为$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$，其中$\mathbf{B}$为磁感强度，$\mathbf{H}$为磁场强度，$\mathbf{J}$为电流密度。假设区域Ω′中没有电流分布，于是可以引入标量磁位φ来描述磁场

$$\mathbf{H}=-\nabla\varphi. \tag{6}$$

若Ω′中的介质是均匀、各向同性的，有

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\nabla\cdot(\mu\mathbf{H})=\mu\nabla\cdot\mathbf{H}=-\mu\nabla^2\varphi=0, \tag{7}$$

其中μ是介质的绝对磁导率。因此标量磁位φ在区域Ω′中满足Laplace方程

$$\Delta\varphi(M)=0,\quad M\in\Omega'. \tag{8}$$

现在考虑Neumann外问题边界条件，注意到关系式(6)，可以得到

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right|_{\Gamma}=\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}'\big|_{\Gamma}=-\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}'\big|_{\Gamma}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\big|_{\Gamma}, \tag{9}$$

其中$\mathbf{n}'$是曲面Γ内法线的单位方向向量，$\mathbf{n}$是曲面Γ外法线的单位方向向量。这样就将区域Ω′中的磁位归结为一个Neumann外问题，边界条件由闭曲面Γ上的磁场及Γ的法方向确定。

于是再利用(3)，在知道了Γ上的磁场强度$\mathbf{H}(P_0)$，$P_0\in\Gamma$后，可以构造Γ上的磁荷分布$\omega(P)$，它满足积分方程

$$\omega(P_0)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma}\omega(P)\frac{\cos(\mathbf{r}_{PP_0},\mathbf{n}_{P_0})}{r_{PP_0}^2}\,\mathrm{d}S_P+2\mathbf{H}(P_0)\cdot\mathbf{n}_{P_0},\quad P_0\in\Gamma. \tag{10}$$

这样的磁荷分布 $\omega(P)$ 在区域 Ω' 中产生的磁位与区域 Ω 中的舰船在区域 Ω' 中产生的磁位是相同的，因此，两者的磁场也相同。得到磁荷分布后，利用等式 (5) 和 (6)，可以求出 Ω' 中的磁场强度预测值

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(M) &= -\nabla\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\nabla\Big(\frac{\omega(P)}{r_{PM}}\Big)\,\mathrm{d}S_P \\ &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\omega(P)\frac{\mathbf{r}_{PM}}{r_{PM}^3}\,\mathrm{d}S_P, \quad M\in\Omega'. \end{aligned} \tag{11}$$

式 (10)，(11) 即为磁场预测的理论公式。

舰船磁场预测的理论公式 (10)，(11) 还不能在工程中直接使用，这是因为：首先，工程中只能在曲面 Γ 的有限点上进行磁场强度的测量，而不能得到 Γ 上磁场的连续分布 $\mathbf{H}(P_0)$，$P_0\in\Gamma$。其次，即使得到了 Γ 上磁场的连续分布，对于其上磁荷分布 $\omega(P)$ 的确定涉及到求解积分方程 (10)，这通常和直接求解 Neumann 外问题 (8)，(9) 是一样难的。所以，有必要对磁场预测理论公式进行离散化，以得到工程中可直接使用的实际预测公式。

现在考虑积分方程 (10)，将积分曲面 Γ 划分成 n 个小曲面 $\Gamma_j\ (j=1,2,\cdots,n)$，每个小曲面的重心为 P_j，P_j 处的外法线单位方向向量记为 $\mathbf{n}_j$，并且 P_j 处的磁场强度假设已经由传感器测得，记为 $\mathbf{H}_j$。假定小曲面 Γ_j 上的磁荷面分布密度函数为常数 ω_j，于是积分方程 (10) 在 $P_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 处满足

$$\begin{aligned}\omega_i &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\iint\limits_{\Gamma_j}\omega(P)\frac{\cos(\mathbf{r}_{PP_i},\mathbf{n}_i)}{r_{PP_i}^2}\,\mathrm{d}S_P + 2\mathbf{H}_i\cdot\mathbf{n}_i \\ &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\omega_j\iint\limits_{\Gamma_j}\frac{\cos(\mathbf{r}_{PP_i},\mathbf{n}_i)}{r_{PP_i}^2}\,\mathrm{d}S_P + 2\mathbf{H}_i\cdot\mathbf{n}_i. \end{aligned} \tag{12}$$

对于 $i,j=1,2,\cdots,n$，令

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma_j}\frac{\cos(\mathbf{r}_{PP_i},\mathbf{n}_i)}{r_{PP_i}^2}\,\mathrm{d}S_P, \tag{13}$$

这样，积分方程 (10) 可以离散化为线性方程组

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{14}$$

其中 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\mathbf{b}=(2\mathbf{H}_i\cdot\mathbf{n}_i)_{n\times 1}$，$\mathbf{x}=(\omega_j)_{n\times 1}$，$\mathbf{I}$ 是一个 $n\times n$ 的单位阵。

注意一下系数矩阵 $\mathbf{A}$ 中的对角元 $a_{ii}\ (i=1,2,\cdots,n)$，由 (13) 的定义可知 a_{ii} 是广义积分，但是根据定理 (1) 中的第三条，可以证明 a_{ii} 是收敛的。所以系数矩阵 $\mathbf{A}$ 中的每个元素都可以明确求出，于是当 $\det(\mathbf{A}+\mathbf{I})\neq 0$ 时，可以得到 $\mathbf{x}=(\mathbf{A}+\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}$。如果 $\det(\mathbf{A}+\mathbf{I})=0$，则可以改变曲面 Γ 的划分方案，得到一个不同的 $\mathbf{A}+\mathbf{I}$，或者也可以利用下述的矩阵广义逆方法。

由于在实际工程中，考虑到传感器的成本以及应用时的条件限制，对于一个磁场预测问题，可能无法使用大量的传感器，而上述方法所需的传感器数量与小曲面的数量是一样的，为 n 个。如果只用 $m\ (m\leq n)$ 个传感器测得小曲面 $\Gamma_{j_k}\ (k=1,2,\cdots,m)$ (其中 $\{j_1,j_2,\cdots,j_m\}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$) 重心处的磁场强度 $\mathbf{H}_{j_k}$，则可以取 (14) 中的第 j_k 行，构成一个新的线性方程组

$$(\widehat{\mathbf{A}+\mathbf{I}})\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}. \tag{15}$$

此时的系数矩阵$(\widehat{\mathbf{A}+\mathbf{I}})$是$m \times n$的，当$m < n$时$(\widehat{\mathbf{A}+\mathbf{I}})^{-1}$没有定义，因此，可以转而求解$(\widehat{\mathbf{A}+\mathbf{I}})$的Moore-Penrose广义逆$(\widehat{\mathbf{A}+\mathbf{I}})^{\dagger}$。根据矩阵论[9]的结果，任意矩阵的Moore-Penrose广义逆矩阵存在且唯一，并且可以通过奇异值分解等算法求出，于是可以取$\mathbf{x} = (\widehat{\mathbf{A}+\mathbf{I}})^{\dagger}\hat{\mathbf{b}}$。

在求解出$\mathbf{x} = (\omega_i)_{n\times 1}$之后，根据(11)，区域$\Omega'$中的磁场强度的预测公式变为

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(M) &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma} \omega(P)\frac{\mathbf{r}_{PM}}{r_{PM}^3}\,\mathrm{d}S_P \\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\omega_j\iint\limits_{\Gamma_j}\frac{\mathbf{r}_{PM}}{r_{PM}^3}\,\mathrm{d}S_P, \quad M \in \Omega'.\end{aligned} \tag{16}$$

式(14)，(16)或(15)，(16)即为磁场预测的实际公式。

对于舰船磁场预测的实际公式，有几点需要说明的地方：

1) 注意方程组(14)的右端项$\mathbf{b}$的表达式，可以发现，其实并不一定要知道在$P_i\,(i = 1,2,\cdots,n)$处的磁场值$\mathbf{H}_i$，而只需要知道在这些点上磁场的法向分量$\mathbf{H}_i\cdot\mathbf{n}_i$即可。这对于工程应用是有利的，因为只需在相应的点上沿着法向$\mathbf{n}_i$使用单分量传感器测量即可，而不必使用三分量传感器进行测量，可以有效降低应用成本。

2) 利用传统的深度换算方法只能预测半空间中的舰船磁场强度，然而在某些特殊的应用场合下，只预测半空间上的磁场强度是远远不够的。比如对于潜艇而言，除了要对抗下方空间中的水雷，同时还要对抗上方的航空磁探。然而本方法可以预测任意形状闭曲面Γ之外任何点上的磁场强度，所以可以看作是深度换算方法在任意方向上的一种推广。

3) 对于传统的磁体模拟法，其中的主要难点在于确定等效源的位置，这牵涉到对舰船等铁磁物体结构的先验知识。也就是说，我们要事先知道被研究的舰船等铁磁物体的几何结构，才能较合理地确定等效源的位置，这是磁体模拟法能够准确预测磁场的一个必要条件。然而在一般的情况下，了解铁磁物体的几何结构是很困难甚至是不可能的，比如舰船内部的铁磁主机、辅机等。但是在本方法中，并不需要了解铁磁物体的几何结构，这就好比把舰船等铁磁物体放在一个黑盒内，其在黑盒外产生的磁场可以看成从黑盒表面散发出来，于是舰船等铁磁物体现在就变成了等价的薄壳黑盒表面，这样就把对于复杂的铁磁物体系统的研究转化为薄壳黑盒表面的研究，而后者是人为取定的，具有简单的几何形状，并且总是已知的。因此，本方法比磁体模拟法具有更大的适用范围。

4 数值模拟

考虑位于给定直角坐标系中的两个旋转椭球体$E1$和$E2$以及一个磁偶极子$D1$：椭球体$E1$的长半轴$a1 = 5$m，短半轴$b1 = c1 = 2$m，中心在坐标原点，长轴沿x轴方向，总磁矩$\mathbf{M}_{E1} = (20000, 0, 0)\mathrm{Am}^2$；椭球体$E2$的长半轴$a2 = 2.5$m，短半轴$b2 = c2 = 1$m，中心在$(0, 0, 1)$m，长轴沿$x$轴方向，总磁矩$\mathbf{M}_{E2} = (-2500, 0, 0)\mathrm{Am}^2$；磁偶极子$D1$位于$(2.5, 0.5, 0)$m，磁矩$\mathbf{M}_{D1} = (2500, 0, 0)\mathrm{Am}^2$。椭球体和磁偶极子的布置方式如图2所示。这里磁矩大小的选择是使得椭球体用来模拟舰船感应磁性，偶极子来模拟舰船固定磁性。椭球体和磁偶极子在空间任意点所产生的磁场精确值可以通过解析式来计算[1]。

确定两条测量线(单位:米)

$$L1=\{(x,y,z)\mid -10\le x\le 10,\ y=0,\ z=4\},$$

$$L2=\{(x,y,z)\mid -10\le x\le 10,\ y=0,\ z=-4\},$$

在这两条线上进行磁场的预测，并将其与精确值比较。把曲面Γ取作长方体

$$\{(x,y,z)\mid -6\le x\le 6,\ -2.5\le y\le 2.5,\ -2.5\le z\le 2.5\}$$

的表面。Γ沿x方向作8等分，沿y和z方向各作3等分，如图3，这样形成114个小曲面，每个小曲面上的重心、法向、重心处的磁场强度都可以算出。

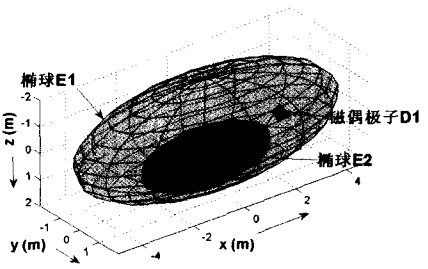

图 2: 试验设计方案

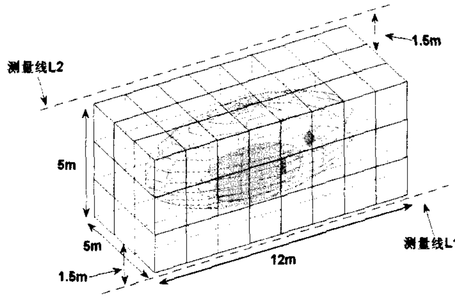

图 3: 曲面Γ的划分

通过求解式(14)，再利用(16)，可以预测出测量线$L1$和$L2$上的磁场值，其与精确值的比较如图4和5所示。实际工程中常用相对误差

$$\max\{|\text{精确值-预测值}|\}/\max\{|\text{精确值}|\}\times 100\%$$

来衡量磁场预测精度。此时测量线$L1$上x,y,z三个方向的磁场相对误差分别为6.96%、12.01%、7.65%；$L2$上x, y, z三个方向的磁场相对误差分别为5.87%、12.01%、7.08%，可以满足工程需求。

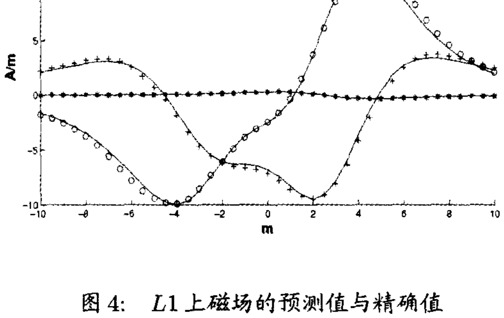

图 4: $L1$上磁场的预测值与精确值

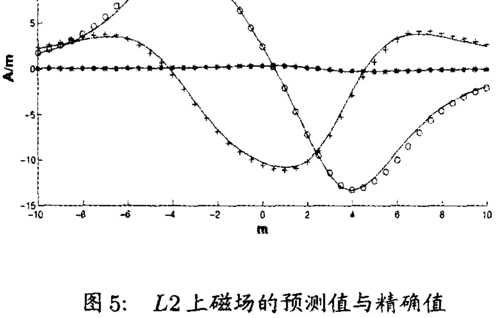

图 5: $L2$上磁场的预测值与精确值

接下来，减少测量点的数目，Γ的上下表面上的测量点数目不做改变，而在其侧面上取少量的测量点，取法如图6所示，只在灰色的小曲面上进行磁场测量，总测量点56个，比先前的114个少了一半多。利用式(15)、(16)，测量线$L1$和$L2$上的磁场预测值与精确值如图7和8所示。此时测量线$L1$上x, y, z三个方向的磁场相对误差分别为9.70%、27.77%、9.61%；$L2$上x, y, z三个方向的磁场相对误差分别为7.47%、27.77%、8.56%。x, z两个分量的误差变化不大，可以满足工程需求，而y分量的误差变化较大是由于其精确值接近0所引起的，因此也可以满足工程需求。由此不难看出，虽然我们减少了一半的测量点，但是预测的精度还是相当高的，所以利用本方法，只要测量点的位置取得比较合理，即使减少一定的测量数目，其对预测精确性的影响也是不大的。

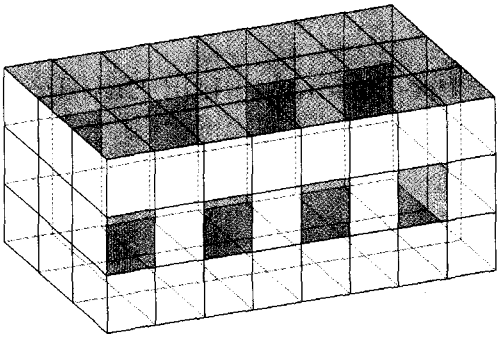

图6: 磁场测量点布置

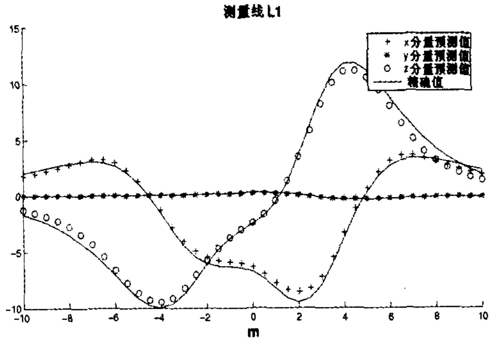

图7: $L1$上磁场的预测值与精确值

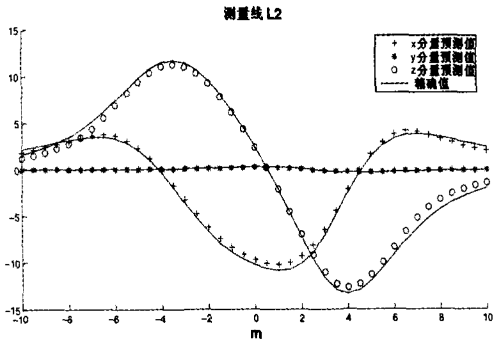

图8: $L2$上磁场的预测值与精确值

5 结束语

本文利用位势理论，把对舰船等铁磁物体的磁场预测问题的研究转化为对等效磁荷面分布的研究。该方法具有坚实的数学理论作为保证，适用范围广，并且十分有利于工程实现。数值模拟也表明了此法的精确性。

参考文献：

[1] 周耀忠，张国友. 舰船磁场分析计算[M]. 北京：国防工业出版社，2004

[2] 河野照哉，宅间董(日)，尹克宁(译). 电场值计算法[M]. 北京：高等教育出版社，1985

[3] Cauffet G, *et al*. Configuration optimized by genetic algorithms for localization and the identification of a magnetic dipole[C]// 13th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, Lyon-Evian (France), 2001

[4] Cauffet G, *et al*. Geometric construction technic to localization of a magnetic dipole[C]// 13th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, Lyon-Evian (France), 2001

[5] 陈传璋，侯宗义，李明宗. 积分方程论及其应用[M]. 上海：上海科学技术出版社，1987

[6] http://www.pladaily.com.cn/gb/defence/2002/06/18/20020618017075_zhxw.html

[7] 谷超豪等. 数学物理方程(第二版)[M]. 北京：高等教育出版社，2002

[8] Stratton J A. Electromagnetic Theory[M]. New-York: McGraw-Hill, 1941

[9] 徐树方. 矩阵计算的理论与方法[M]. 北京：北京大学出版社，1995

A Magnetic Field Prediction Method Based on Potential Theory

CHEN Jie[1], LU Xi-wen[1], ZHANG Rong[2], LI Jian-wu[2]

(1- Department of Mathematics, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237;
2- No.704 Institute, CSIC, Shanghai 200031)

Abstract: To enhance the stealth ability of naval vessels, degaussing processes should be taken. The magnetic field prediction is a key step in degaussing. For an arbitrary naval vessel, a surface enclosing it is constructed. Based on the potential theory, an integral equation relating the equivalent magnetic charge layer on this surface with the measurements of magnetic field sensors is developed. After solving the equation by discretization, the magnetic charge layer is obtained to predict the magnetic field produced by the vessel. This method needs no knowledge of the geometric structure of the studied ferromagnetic objects and can make the prediction in any direction, so it can be widely applied. The numerical simulations show the precision and the practical value of the method.

Keywords: naval vessels; degaussing; magnetic field; prediction; potential theory; integral equation